Feladat 1. Hány normálosztója van az $\mathbf{A}_4$ csoportnak?

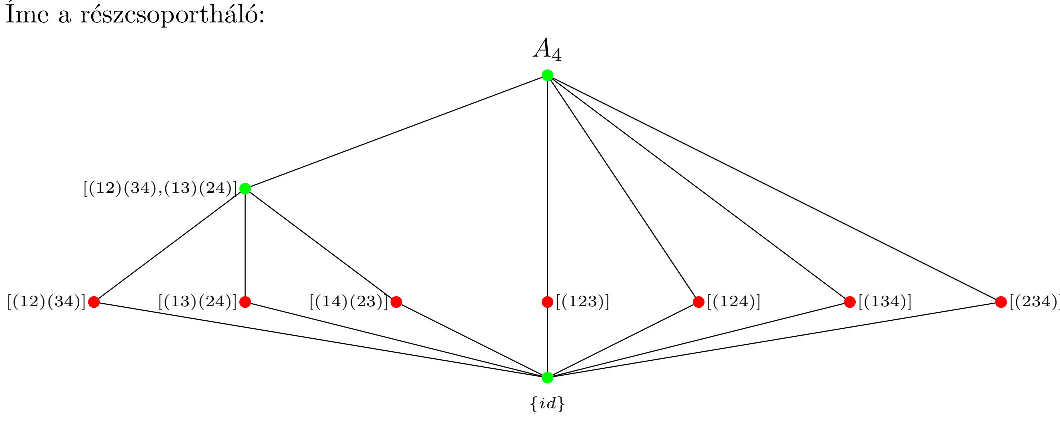
Megoldás: Nézzük először $\mathbf{A}_4$ részcsoportjait. A Lagrange-tétel alapján a lehetséges elemszámok: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

- Elsőrendő részcsoportból egy van, a triviális.
- A másodrendű részcsoportok a másodrendű elemek által generált ciklikus részcsoportok, tehát $[(12)(34)]$, $[(13)(24)]$, és $[(14)(23)]$.
- A harmadrendű részcsoportok a harmadrendű elemek által generált ciklikus részcsoportok. Mivel $\mathbb{Z}_3$-ban két harmadrendű elem van, a 8 harmadrendű elem 4 harmadrendű részcsoportot generál (az inverzek ugyanazt): $[(123)]$, $[(124)]$, $[(134)]$, és $[(234)]$.
- Negyedrendű csoportban nem lehet harmadrendű elem, úgyhogy összesen négy elem lehet benne ilyen részcsoportban: az identitás és a három másodrendű elem. Ezek ténylegesen egy negyedrendű részcsoportot alkotnak.
- A csoportban nincs hatodrendű elem, így nem lesz hatodrendű ciklikus részcsoport sem. Így egy esetleges hatodrendű részcsoportot két elem generál, ebből legalább az egyik harmadrendű, mert a nem harmadrendű elemek részcsoportot alkotnak. Viszont egy harmadrendű elem és egy tetszőleges olyan elem, ami nem hatványa ennek a harmadrendűnek, generálja $\mathbf{A}_4$-et: például (123)-ból és (12)(34)-ből kihozható csoportműveletekkel $(12)(34)\cdot(123)(12)(34) = (214)$ és $(132)(12)(34)(123) = (23)(14)$, és máris van hét elem a részcsoportban. (Két harmadrendű elemből, amelyek nem azonos harmadrendű részcsoportot generálnak, kihozható másodrendű: $(123)(124) = (14)(23)$, és ott vagyunk, ahol az előbb.) Így $\mathbf{A}_4$-nek nincs hatodrendű részcsoportja.
- Az egyetlen 12 rendű részcsoport $\mathbf{A}_4$.

Nézzük a normálosztókat. A triviális részcsoportok normálosztók. Mivel csak egy negyedrendű részcsoport van, az is normálosztó.

Több viszont nincs: sem a másodrendű, sem a harmadrendű ciklikus részcsoportok nem normálosztók, mert például $(132)(12)(34)(123) = (23)(14) \notin [(12)(34)]$, és $(12)(34)(123)(12)(34) = (214) \notin [(123)]$.

Íme a részcsoportháló:



Feladat 2. Hány normálosztója van a kvaterniócsoportnak?

Megoldás: Megint elemszám szerint nézzük a részcsoportokat.

- Triviális részcsoportok: $\{1\}$ és $\mathbf{Q}$.

- Másodrendű részcsoportból csak egy van, $[-1]$, hiszen -1 az egyetlen másodrendű elem.
- Negyedrendű elemből hat van, ez három negyedrendű ciklikus részcsoportot jelent, hiszen $\mathbb{Z}_4$-ben két negyedrendű elem van: $[i]$, $[j]$, és $[k]$. Nem ciklikus negyedrendű részcsoport nincs, hiszen abban három másodrendű elemnek kellene lenni.

A $\mathbf{Q}$ minden részcsoportja normálosztó: a negyedrendűek azért, mert indexük 2, a másodrendű azért, mert két (negyedrendű) normálosztó metszeteként előáll (más érv: a másodrendű részcsoport a $\mathbf{Q}$ centruma).

Feladat 3. Adja meg a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Megoldás: Ha φ ilyen homomorfizmus, és $1\varphi = c$, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $n\varphi = (1\cdot n)\varphi = 1\varphi\cdot n = nc$, hiszen homomorfizmus felcserélhető az egész együtthatós hatványozással (ami additív írásmódban az n-szerezés).

Az $n \to nc$ leképezés minden $c \in \mathbb{Q}$ esetén homomorfizmus, hiszen $(n_1 + n_2)c = n_1c + n_2c$.

Így a homomorfizmusok száma $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$. Egy (a $c = 0$-hoz tartozó triviális homomorfizmus) híján mind injektív, de egyik sem szürjektív.

Feladat 4. Adja meg a $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Megoldás: Legyen megint $1\varphi = c$. Megintcsak teljesülni fog, hogy $q\varphi = qc$ minden $q \in \mathbb{Q}$-ra. Ez egész q-k esetén ugyanúgy adódik, mint az előbb, ha pedig $q = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor a b-szerezéssel való felcserélhetőség miatt $(\frac{a}{b}\varphi) \cdot b = (\frac{a}{b} \cdot b)\varphi = a\varphi = a$, ahonnan $\frac{a}{b}\varphi = \frac{a}{b}$. (Kihasználtuk, hogy $\mathbb{R}$-ben a b-szerezés injektív.)

Megintcsak teljesül, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $q \to cq$ homomorfizmus. A homomorfizmusok száma $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, egy híján mind injektív, $|\mathbb{R}| > |\mathbb{Q}|$ miatt egyik sem szürjektív.

Feladat 5. Adja meg a $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_9$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Megoldás: Legyen megint $1\varphi = c$. Mivel $\mathbb{Z}_9$-ben $0 = 0\varphi = (1\cdot 15)\varphi = (1\varphi)\cdot 15 = 15c$, $15c$-nek oszthatónak kell lennie 9-cel. Tehát $c \in \{0, 3, 6\}$.

Ezekre a c-kre az $a \to ca$ leképezés jóldefiniált, mert ha $a_1 = a_2$ $\mathbb{Z}_{15}$-ben (vagyis $15 \mid a_1 - a_2$), akkor $ca_1 = ca_2$ $\mathbb{Z}_9$-ben (vagyis $9 \mid ca_1 - ca_2$). Az előzőekhez hasonlóan adódik, hogy a leképezés homomorfizmus, és $\mathbb{Z}_{15} = [1]$ miatt minden homomorfizmus ilyen alakú.

Tehát három $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_9$ homomorfizmus van. Nyilván egyik sem injektív, és egyik sem lesz szürjektív, hiszen képhalmazuk vagy $\{0\}$, vagy $\{0, 3, 6\}$.

Feladat 6. Adja meg a $\mathbf{Q} \to \mathbf{V}$ homomorfizmusok számát, és azt is, hogy ezek közül mennyi az injektív, illetve a szürjektív.

Megoldás: A $\mathbf{Q}$ egy generátorrendszere $\{i, j\}$. Ha ezek képeit tudjuk, akkor a többi elem képe egyértelműen meghatározható: $1\varphi = 1$, $(-1)\varphi = (i^2)\varphi = (i\varphi)^2$, $(-i)\varphi = (i\varphi)^3$, $(-j)\varphi = (j\varphi)^3$, $k\varphi = i\varphi \cdot j\varphi$, és $(-k)\varphi = j\varphi \cdot i\varphi$. A következő lehetőségek vannak:

1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	i	i	i	i
1	1	1	1	j	j	j	j
1	1	1	1	k	k	k	k
1	1	i	i	1	i	i	i
1	1	i	i	i	i	1	1
1	1	i	i	j	j	k	k
1	1	i	i	k	k	j	j
1	1	j	j	1	1	j	j
1	1	j	j	i	i	k	k
1	1	j	j	j	j	1	1
1	1	j	j	k	k	i	i
1	1	k	k	1	1	k	k
1	1	k	k	i	i	j	j
1	1	k	k	j	j	i	i
1	1	k	k	k	k	1	1

Mindegyik sor esetén le kell ellenőrizni, hogy az adott leképezés homomorfizmus ad-e. Ez nagyon hosszú munka is lehet, de ebben az esetben nem az: mindegyik sor homomorfizmust fog adni. Emellett a következőképp lehet érvelni:

- Az első sor a triviális homomorfizmus.
- Kilenc sor úgy adódik, hogy $\mathbf{Q}$ egy negyedrendű részcsoportja 1-be, a $\mathbf{Q}$ többi elem pedig ugyanabba a másodrendű elembe vannak képezve. Ezek könnyen láthatóan homomorfizmusok lesznek.
- A maradék hat sor esetén 1 és -1 képe 1, az $\{i, -i\}$, $\{j, -j\}$, $\{k, -k\}$ halmazok képei pedig i, j, és k valamilyen sorrendben. Ezek a leképezések előállnak úgy, mint a "természetes" (hetedik sor által reprezentált) $\mathbf{Q} \to \mathbf{V}$ homomorfizmus, és egy $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ automorfizmus szorata. Így ők is homomorfizmusok.

Tehát 16 $\mathbf{Q} \to \mathbf{V}$ homomorfizmus van, ebből 6 szürjektív, egy sem injektív.

Feladat 7. Egy $\mathbf{G}$ csoport egy g elemének *centralizátora* a $C_g := \{h : gh = hg\}$ halmaz, a $\mathbf{G}$ *centruma* a $\bigcap_{g \in G} C_g$ halmaz. Bizonyítsa, hogy a centralizátorok részcsoportok, és a centrum normálosztó. Adja meg az $\mathbf{S}_3$ csoport egy olyan elemét, melynek centralizátora nem normálosztó.

Megoldás: Mivel $g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$, $1 \in C_g$. Ha $h_1, h_2 \in C_g$, akkor $gh_1h_2 = h_1gh_2 = h_1h_2g$, ezért $h_1h_2 \in C_g$, és $gh_1^{-1}h_1 = g = h_1^{-1}h_1g = h_1^{-1}gh_1$, így a kancellativitásból $gh_1^{-1} = h_1^{-1}g$, vagyis $h_1^{-1} \in C_g$. Tehát C_g részcsoport.

A centrum részcsoportok metszete, így maga is részcsoport. Ha z benne van a centrumban, akkor minden $g \in G$ elemmel felcserélhető, így $g^{-1}zg = g^{-1}gz = z$ is benne van a centrumban. Tehát a centrum zárt a konjugálásra is.

Az $\mathbf{S}_3$-ban az (12) transzpozíció centralizátora $[(12)]$, ami nem normálosztó.